

## *Lezione 9*

# Prestazioni dinamiche dei sistemi di controllo

## Caratterizzazione delle prestazioni dinamiche

Le prestazioni dinamiche fanno riferimento al comportamento del sistema di controllo durante i transitori, ossia alla modalità con cui le variabili del sistema, ed in particolare la variabile controllata, passano da una condizione di regime ad una nuova, a seguito di variazioni degli ingressi.

Sono di particolare importanza, a questo riguardo:

- la **velocità di risposta**, ovvero la rapidità con cui la variabile controllata segue brusche variazioni (per esempio a scalino) del riferimento;
- lo **smorzamento dei transitori**, ovvero l'assenza o l'irrelevanza di oscillazioni nel transitorio.

Con riferimento ai parametri con cui si era caratterizzata la risposta allo scalino di un sistema dinamico, potremo dire che la velocità di risposta corrisponde ad avere un tempo di salita della risposta allo scalino ridotto mentre lo smorzamento dei transitori corrisponde a sovraelongazione massima e tempo di assestamento contenuti.

Rientrano inoltre nel novero delle prestazioni dinamiche anche la reiezione dei disturbi, siano essi sulla linea di andata o su quella di retroazione, e la moderazione del controllo, ossia la proprietà del sistema di controllo per cui la variabile di controllo non è sottoposta ad eccessive sollecitazioni.

## Banda passante

Si consideri un sistema a costante di tempo:

$$H(s) = \frac{1}{1 + sT}, \quad T > 0.$$

E' noto che la risposta allo scalino di questo sistema è tanto più rapida quanto più piccola è la costante di tempo  $T$ . Detta  $\omega_H = 1/T$  la pulsazione del polo, possiamo equivalentemente dire che la risposta è tanto più veloce quanto più in alta frequenza è la pulsazione del polo.

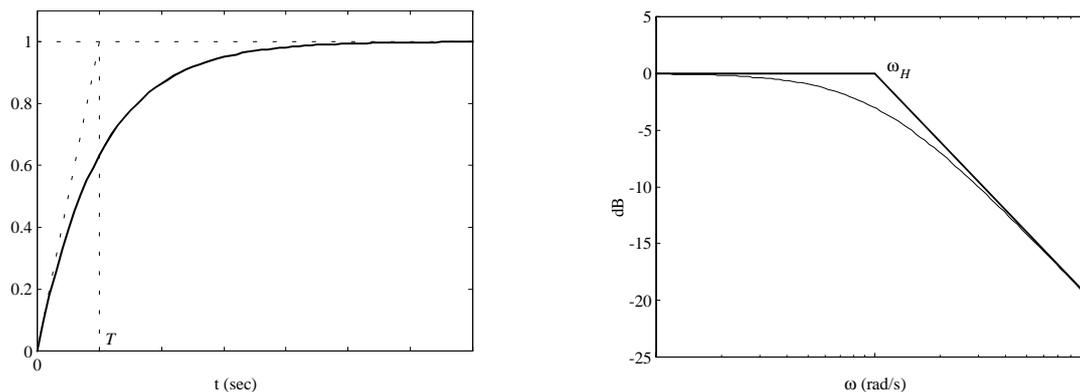


Fig. 1 : Risposta allo scalino e diagramma di Bode del modulo

Pertanto la pulsazione del polo è un buon indice della velocità di risposta del sistema.

Si consideri ora un sistema di controllo in anello chiuso, ed in particolare la funzione di trasferimento dal riferimento  $y^o$  alla variabile controllata  $y$ :

$$\frac{Y(s)}{Y^o(s)} = F(s).$$

In virtù dell'imposizione dei requisiti statici,  $F(s)$  varrà 1, o comunque un valore prossimo a 1, in bassa frequenza (cioè per  $s \rightarrow 0$ ). Inoltre il sistema di controllo sarà progettato in modo tale che la sua funzione di trasferimento rifletta la caratteristica, propria dei sistemi fisici, di avere più poli che zeri. Da queste considerazioni seguono le due caratteristiche fondamentali del diagramma di Bode del modulo di  $F$ :

- per  $\omega \rightarrow 0$ ,  $|F(j\omega)|_{dB} \approx 0$ ;
- per  $\omega \rightarrow \infty$ ,  $|F(j\omega)|_{dB} \rightarrow -\infty$ .

Andamenti plausibili del modulo di  $F$  potranno pertanto essere quelli riportati in figura:

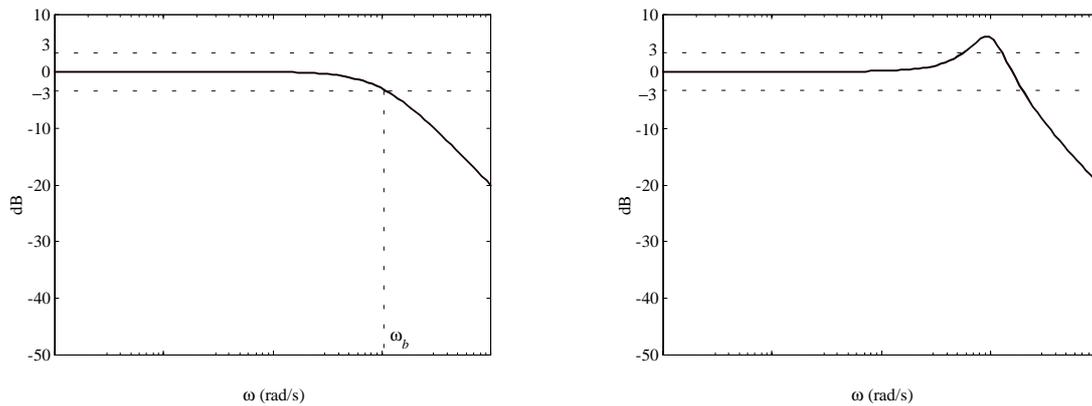


Fig. 2 : Tipici andamenti del diagramma di Bode del modulo di  $F$

Se il diagramma di Bode del modulo di  $F$  non supera per nessuna pulsazione il valore 3 dB, si definisce **banda passante** del sistema di controllo l'insieme delle pulsazioni  $[0, \omega_b]$ , essendo  $\omega_b$  la pulsazione alla quale il modulo vale  $-3$  dB.

Si osservi che la condizione espressa preliminarmente alla definizione di banda passante esclude la presenza di rilevanti picchi o rigonfiamenti nel diagramma del modulo, e quindi le situazioni rappresentate dal diagramma di destra in Fig. 2. In altre parole il sistema di controllo si comporta da **filtro passabasso**.

Se la pendenza del diagramma di  $|F|_{dB}$  dopo la pulsazione  $\omega_b$  vale  $-1$ , il sistema di controllo si comporta in prima approssimazione come un **sistema del primo ordine**, con pulsazione del polo pari a  $\omega_b$ . Ne consegue che i transienti del sistema in anello chiuso saranno caratterizzati da una costante di tempo approssimativamente pari a:

$$\tau = \frac{1}{\omega_b} .$$

Il sistema sarà quindi tanto più veloce quanto più estesa è la sua banda passante, ossia l'estremo superiore della banda passante è un buon indice della **velocità di risposta** del sistema di controllo.

## Velocità di risposta e pulsazione critica

Ci si pone ora l'obiettivo di individuare un indice di velocità di risposta legato alla funzione di trasferimento d'anello  $L(s)$ , piuttosto che alla funzione di trasferimento in anello chiuso  $F(s)$ .

Ricordiamo che risulta:

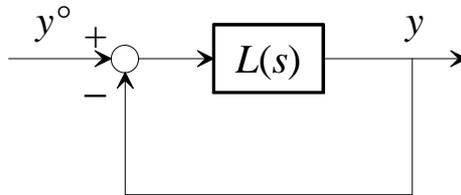


Fig. 3 : Sistema di controllo privo di disturbi

$$F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}.$$

Il legame tra le risposte in frequenza è quindi:

$$F(j\omega) = \frac{L(j\omega)}{1 + L(j\omega)},$$

ed in particolare:

$$|F(j\omega)| = \frac{|L(j\omega)|}{|1 + L(j\omega)|}.$$

Consideriamo ora la seguente **approssimazione**:

$$|F(j\omega)| = \frac{|L(j\omega)|}{|1 + L(j\omega)|} \approx \begin{cases} 1 & \forall \omega: |L(j\omega)| \gg 1 \\ |L(j\omega)| & \forall \omega: |L(j\omega)| \ll 1 \end{cases}.$$

Tracciato il diagramma di  $|L|$ , l'approssimazione consiste nell'attribuire a  $|F|$  il valore 1 per quelle pulsazioni per cui  $|L|$  è decisamente sopra l'asse a 0 dB, o il valore di  $|L|$  quando  $|L|$  è decisamente sotto l'asse a 0 dB.

Poniamoci ora nelle ipotesi di **applicabilità del criterio di Bode**.

Considerando un tipico andamento di  $|L|$ , si avrà la situazione riportata in Fig. 4.

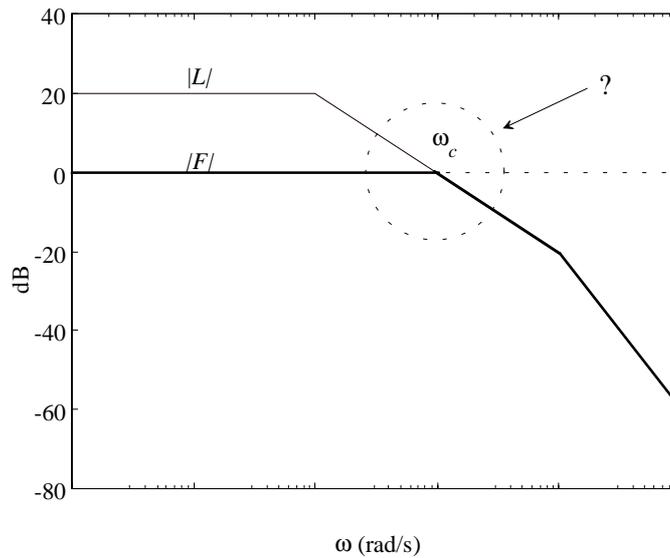


Fig. 4 : Metodo grafico per il tracciamento del diagramma asintotico del modulo di  $F$  a partire da quello di  $L$

L' approssimazione consiste allora nel porre:

$$|F(j\omega)| \approx \begin{cases} 1 & \forall \omega \ll \omega_c \\ |L(j\omega)| & \forall \omega \gg \omega_c \end{cases} .$$

L' approssimazione è evidentemente migliore a pulsazioni lontane dalla pulsazione critica  $\omega_c$ .

Possiamo quindi concludere che  $F$  si comporta da filtro passabasso a guadagno unitario, ma non siamo ancora in grado di dire se presenta risonanza (ossia se il modulo di  $F$  presenta rigonfiamenti). Di conseguenza non è ancora chiaro se sia più opportuno approssimare  $F$  con un sistema del primo ordine o con uno del second'ordine a poli complessi.

## Smorzamento e margine di fase

Il calcolo esatto del modulo di  $F$  per  $\omega = \omega_c$  conduce al seguente risultato:

$$\begin{aligned} |F(j\omega_c)| &= \frac{|L(j\omega_c)|}{|1 + L(j\omega_c)|} = \frac{1}{|1 + e^{j\varphi_c}|} = \frac{1}{|1 + \cos \varphi_c + j \sin \varphi_c|} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \cos \varphi_c^2 + 2 \cos \varphi_c + \sin \varphi_c^2}} = \frac{1}{\sqrt{2(1 + \cos \varphi_c)}} = \frac{1}{\sqrt{2(1 - \cos \varphi_m)}} = \frac{1}{2 \sin\left(\frac{\varphi_m}{2}\right)}. \end{aligned}$$

In particolare, per  $\varphi_m = 90^\circ$ , risulta:

$$|F(j\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow |F(j\omega_c)|_{dB} = -3,$$

per cui  $\omega_c = \omega_b$ , ossia la **pulsazione critica** coincide con l'**estremo superiore della banda passante**.

Peraltro per valori inferiori a  $90^\circ$  del margine di fase, ma comunque elevati, il modulo di  $F$  in  $\omega_c$  rimane prossimo al valore precedentemente ottenuto: in particolare rimane inferiore a 1 per valori di  $\varphi_m$  superiori a  $60^\circ$ . Considerando che valori di margine di fase elevato sono di norma associati ad attraversamenti dell'asse delle pulsazioni con pendenza del modulo di  $L$  pari a  $-1$ , possiamo concludere che in questo caso ( $\varphi_m > 60^\circ$ ) è adeguata un'approssimazione di  $F$  con una funzione di trasferimento del primo ordine a **costante di tempo**, con costante di tempo pari all'inverso della pulsazione critica:

$$F(s) = \frac{1}{1 + s/\omega_c}.$$

Il transitorio quindi si assesterà al 99% del valore di regime dopo un tempo pari a circa  $4.6/\omega_c$ .

Per valori inferiori del margine di fase ( $\varphi_m < 60^\circ$ ) appare più adeguata un'approssimazione del secondo ordine con **poli complessi coniugati** alla pulsazione  $\omega_c$ :

$$F(s) \approx \frac{\omega_c^2}{s^2 + 2\zeta\omega_c s + \omega_c^2}.$$

Lo smorzamento si può determinare confrontando il valore assunto in  $\omega_c$  dal modulo della risposta in frequenza dell'approssimante con il valore esatto determinato precedentemente:

$$|F(j\omega_c)| = \frac{1}{2\zeta} = \frac{1}{2 \sin\left(\frac{\varphi_m}{2}\right)},$$

da cui:

$$\zeta = \sin\left(\frac{\varphi_m}{2}\right) \approx \frac{\varphi_m}{100},$$

dove l'ultima approssimazione è valida se  $\varphi_m$  è espresso in gradi.

Il transitorio quindi si assesterà al 99% del valore di regime dopo un tempo pari a circa  $4.6/(\zeta\omega_c)$ .

Si osservi che il risultato trovato stabilisce un'importante relazione tra lo smorzamento dei transitori in anello chiuso ed il margine di fase, il quale, quindi, oltre a costituire un indice di robustezza della stabilità, qualifica anche il "grado di stabilità" del sistema.

### **Esempio**

Sia:

$$L(s) = \frac{100}{s(1+0.0025s)}.$$

Si vuole tracciare l'andamento qualitativo della risposta allo scalino della funzione di trasferimento  $F(s)$ .

Il diagramma di Bode di  $|L(j\omega)|$  è riportato in figura:

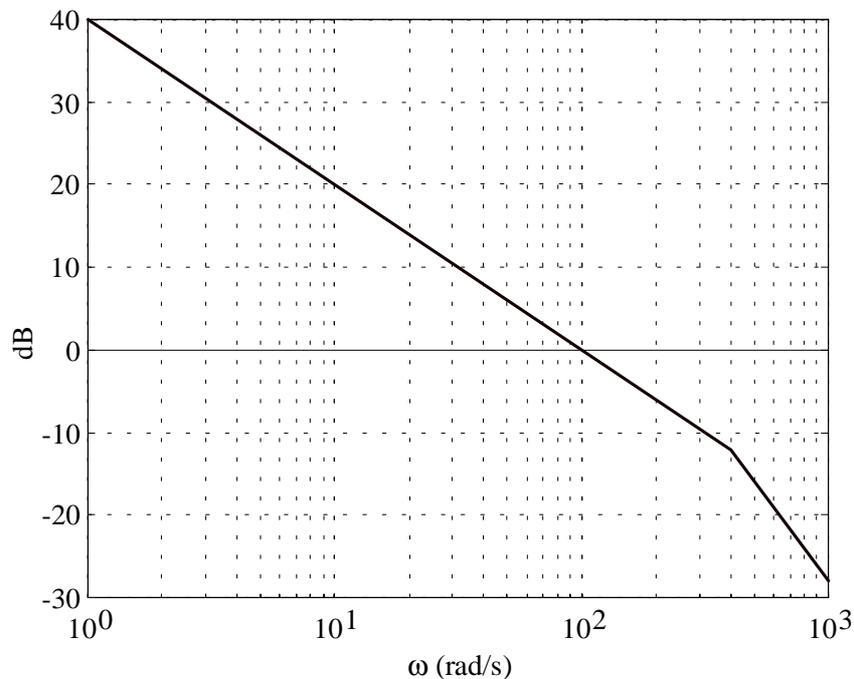


Fig. 5 : Diagramma di Bode asintotico di  $|L|$

La pulsazione critica è  $\omega_c = 100$  rad/s, mentre il margine di fase risulta:

$$\varphi_m = 180^\circ - |\varphi_c| = 180^\circ - \left| -90^\circ - \arctan\left(\frac{100}{400}\right) \right| = 180^\circ - |-90^\circ - 14^\circ| = 76^\circ.$$

E' quindi possibile procedere all'approssimazione:

$$F(s) \approx \frac{1}{1 + \frac{s}{\omega_c}} = \frac{1}{1 + 0.01s}.$$

La risposta allo scalino approssimata di  $F(s)$  è riportata in Fig. 6, dove viene confrontata con la risposta effettiva del sistema di controllo:

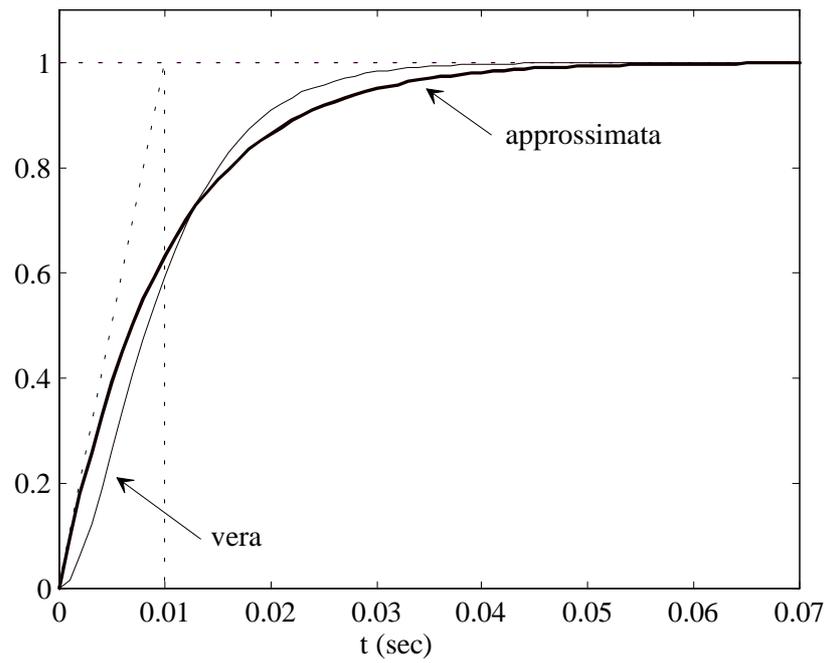


Fig. 6 : Risposta allo scalino di  $F$

## Reiezione dei disturbi

### *Disturbo in linea di andata*

Consideriamo un disturbo  $d$  in linea di andata:

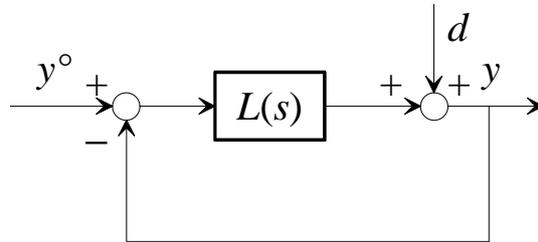


Fig. 7 : Sistema di controllo con disturbo in linea di andata

La funzione di trasferimento dal disturbo  $d$  alla variabile controllata  $y$  è data da:

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = S(s) = \frac{1}{1 + L(s)},$$

dove  $S$  prende il nome di **funzione di sensitività**.

Possiamo **approssimare** il modulo della risposta in frequenza come fatto prima:

$$|S(j\omega)| = \frac{1}{|1 + L(j\omega)|} \approx \begin{cases} \frac{1}{|L(j\omega)|} & \forall \omega: |L(j\omega)| \gg 1 \\ 1 & \forall \omega: |L(j\omega)| \ll 1 \end{cases},$$

e, nelle ipotesi di applicabilità del criterio di Bode,

$$|S(j\omega)| = \frac{1}{|1 + L(j\omega)|} \approx \begin{cases} \frac{1}{|L(j\omega)|} & \forall \omega \ll \omega_c \\ 1 & \forall \omega \gg \omega_c \end{cases}$$

Tracciato il diagramma di  $|L|$ , quello di  $1/|L|$  si ottiene per ribaltamento rispetto all'asse a 0 dB. L'approssimazione consiste nell'attribuire a  $|S|$  il valore 1 per quelle pulsazioni per cui  $|L|$  è decisamente sotto l'asse a 0 dB, o il valore di  $1/|L|$  quando  $|L|$  è decisamente sopra l'asse a 0 dB. Considerando un tipico andamento di  $|L|$ , si avrà la situazione riportata in figura (con le stesse considerazioni fatte prima circa la validità delle approssimazioni).

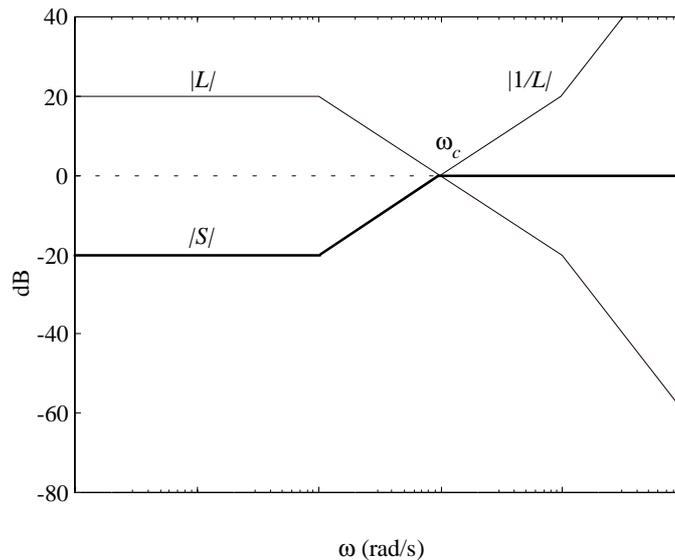


Fig. 8 : Costruzione grafica del diagramma asintotico di  $|S|$

Pertanto le componenti armoniche (sinusoidi) del disturbo a pulsazioni inferiori alla pulsazione critica, e quindi interne alla banda passante, sono fortemente attenuate sulla variabile controllata. L'attenuazione è tanto maggiore quanto più alto è il valore del modulo di  $L$  sulla banda passante.

Si conclude quindi che per un'efficace reiezione dei disturbi in linea di andata la **banda passante** deve essere **sufficientemente ampia** da contenere le armoniche significative del disturbo.

### *Disturbo in linea di retroazione*

Consideriamo un disturbo  $n$  in linea di retroazione:

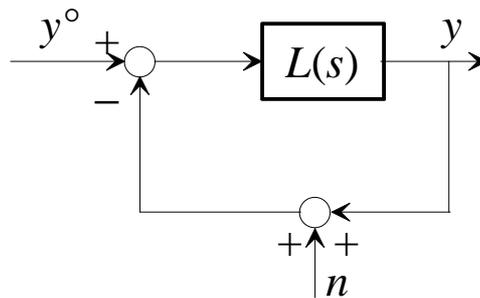


Fig. 9 : Sistema di controllo con disturbo in linea di retroazione

La funzione di trasferimento dal disturbo  $n$  alla variabile controllata  $y$  è data da:

$$\frac{Y(s)}{N(s)} = -F(s) = -\frac{L(s)}{1 + L(s)},$$

La funzione di trasferimento  $F(s)$ , che prende il nome di **funzione di sensitività complementare**<sup>1</sup>, è la stessa esistente tra riferimento e variabile controllata. Sappiamo quindi già come ottenerne il modulo a partire da quello di  $L$  (si veda la Fig. 4).

Possiamo concludere quindi che tutte le componenti armoniche del disturbo esterne alla banda passante del sistema di controllo vengono attenuate, mentre quelle interne passano. Ne consegue che per un'efficace reiezione dei disturbi in linea di retroazione (che tipicamente si caratterizzano come rumore di alta frequenza), è bene che la **banda passante non sia eccessivamente ampia**.

---

<sup>1</sup> Si osservi che  $F(s) = 1 - S(s)$

## Moderazione del controllo

Consideriamo un sistema di controllo in cui mettiamo in evidenza la variabile di controllo:

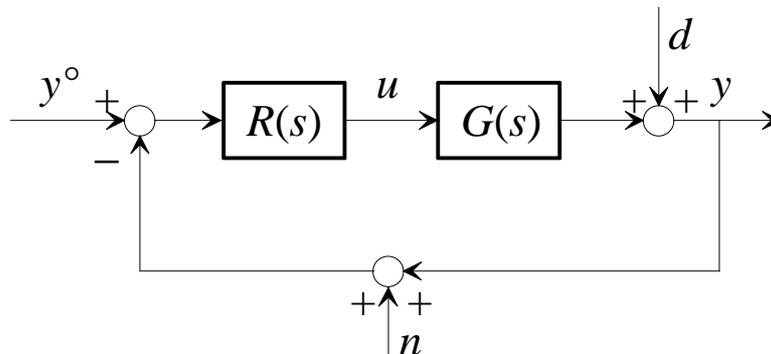


Fig. 10 : Sistema di controllo con in evidenza la variabile di controllo

La funzione di trasferimento dal riferimento  $y^o$  alla variabile di controllo  $u$  è data da:

$$\frac{U(s)}{Y^o(s)} = Q(s) = \frac{R(s)}{1 + L(s)},$$

dove  $Q$  prende il nome di **funzione di sensitività del controllo**.

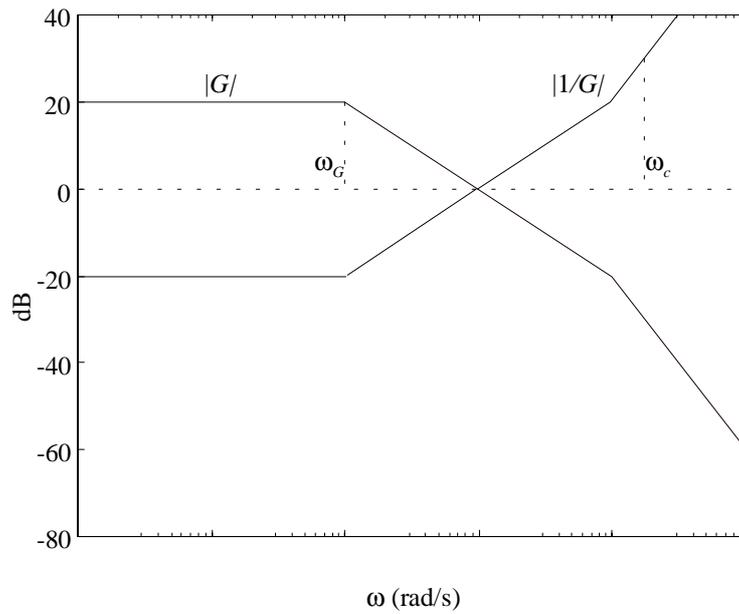
Si osservi che, a meno del segno, questa è anche la funzione di trasferimento dal disturbo  $d$  e dal disturbo  $n$  alla variabile di controllo. Poiché il riferimento e i due disturbi hanno caratteristiche armoniche differenti, è bene che la funzione di trasferimento attenui (o non amplifichi) su tutto l'asse delle pulsazioni.

Possiamo approssimare il modulo della risposta in frequenza:

$$|Q(j\omega)| = \frac{|R(j\omega)|}{|1 + L(j\omega)|} \approx \begin{cases} \frac{1}{|G(j\omega)|} & \forall \omega: |L(j\omega)| \gg 1 \quad (\omega \ll \omega_c) \\ |R(j\omega)| & \forall \omega: |L(j\omega)| \ll 1 \quad (\omega \gg \omega_c) \end{cases}.$$

Poiché fuori dalla banda passante ( $\omega > \omega_c$ ) il modulo di  $Q$  coincide con quello di  $R$ , è bene che il **regolatore** sia progettato in modo che il suo **modulo non assuma valori eccessivi in alta frequenza**.

Per quanto riguarda invece il comportamento in banda passante, dobbiamo ipotizzare una tipologia di risposta in frequenza per  $G$ : ipotizziamo un comportamento di tipo filtro passabasso, con un certo guadagno maggiore di 1 e pulsazione di taglio pari a  $\omega_G$ . E' allora abbastanza evidente che se  $\omega_c$  è molto maggiore di  $\omega_G$ , il diagramma di  $1/|G|$ , cui  $|Q|$  coincide in banda, può assumere valori molto elevati.

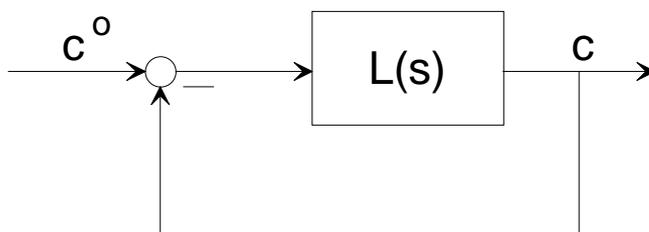


*Fig. 11 : Banda in anello aperto e in anello chiuso*

Concludiamo allora che per garantire moderazione al controllo la **banda passante non deve essere eccessivamente ampia rispetto alla banda che caratterizza la dinamica in anello aperto.**

## Esercizi

### Esercizio 9.1



Per il sistema di controllo di figura si tracci l'andamento qualitativo dell'uscita  $c$  quando:

$$L(s) = 10 \frac{1+10s}{(1+s)(1+0.1s)}$$

e:

$$c^o(t) = sca(t) .$$

### Esercizio 9.2

Con riferimento al sistema di controllo della figura precedente, si dica per quale delle seguenti scelte della funzione di trasferimento  $L(s)$  la risposta di  $c$  allo scalino in  $c^o$  ha tempo di risposta inferiore:

$$L_1(s) = \frac{10}{(1+s)(1+0.01s)}$$

$$L_2(s) = \frac{100}{1+10s}$$

### Esercizio 9.3

Si dica se il sistema di controllo della figura precedente in cui:

$$L(s) = \frac{10}{s(1+0.02s)}$$

è in grado di riprodurre correttamente in uscita il segnale di riferimento:

$$c^o(t) = a_1 \sin(t + \beta_1) + a_2 \sin(5t + \beta_2) + a_3 \sin(100t + \beta_3)$$

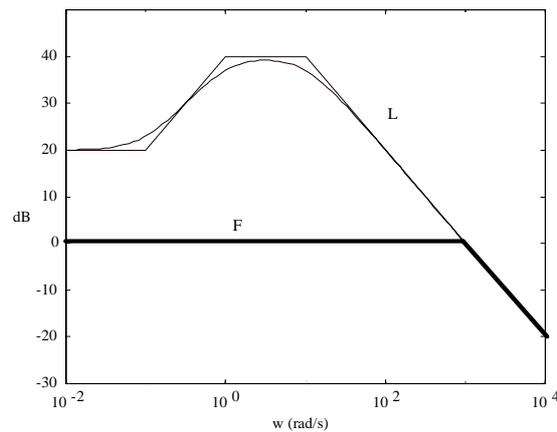
dove  $a_1, a_2, a_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$  sono parametri arbitrari.

## Traccia delle soluzioni

### Esercizio 9.1

Dal diagramma di Bode del modulo di  $L$ , riportato di seguito, si deduce che il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile (criterio di Bode). Nella stessa figura è anche riportato il diagramma di Bode approssimato del modulo della funzione di trasferimento in anello chiuso dal riferimento alla variabile controllata:

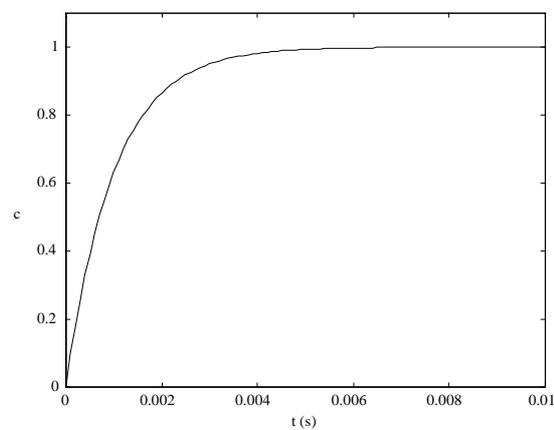
$$F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} .$$



Tale funzione di trasferimento può essere approssimata da una funzione di trasferimento del primo ordine a guadagno unitario e polo a pulsazione  $\omega_c$ :

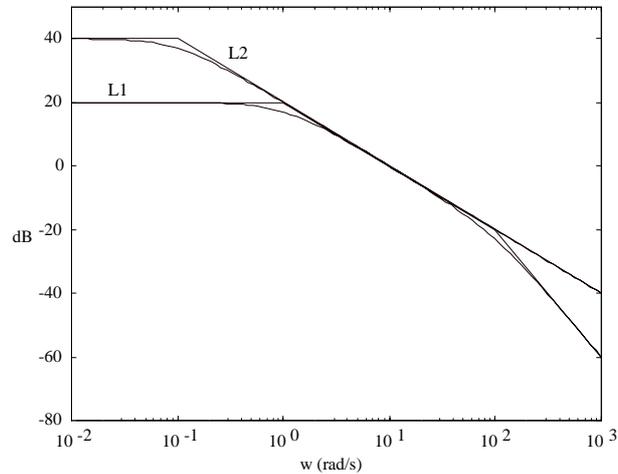
$$F(s) \approx \frac{1}{1 + \frac{s}{\omega_c}} ,$$

per cui, essendo  $\omega_c$  uguale a  $1000 \text{ rad/s}$ , la risposta allo scalino approssimata ha l'andamento riportato in figura:



### Esercizio 9.2

I diagrammi di Bode del modulo di  $L_1$  e  $L_2$  sono riportati in figura. Da essi si deduce che in entrambi i casi il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile, e che la pulsazione critica è la stessa in entrambi i casi. Si può quindi concludere che i due sistemi in anello chiuso avranno tempo di risposta sostanzialmente uguale.



### Esercizio 9.3

Il diagramma di Bode del modulo di  $L$  è riportato in figura, insieme al diagramma approssimato della funzione di trasferimento in anello chiuso  $F$ . Il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile e la sua banda passante arriva fino alla pulsazione 10  $rad/s$ . Poiché però il segnale di riferimento contiene un'armonica a pulsazione 100  $rad/s$  (fuori banda), il sistema non è in grado di inseguire correttamente tale segnale di riferimento.

